Estandarización de Fórmulas Proposicionales

Curso 2014-2015

Mari Carmen Suárez de Figueroa Baonza
mcsuarez@fi.upm.es

Contenidos

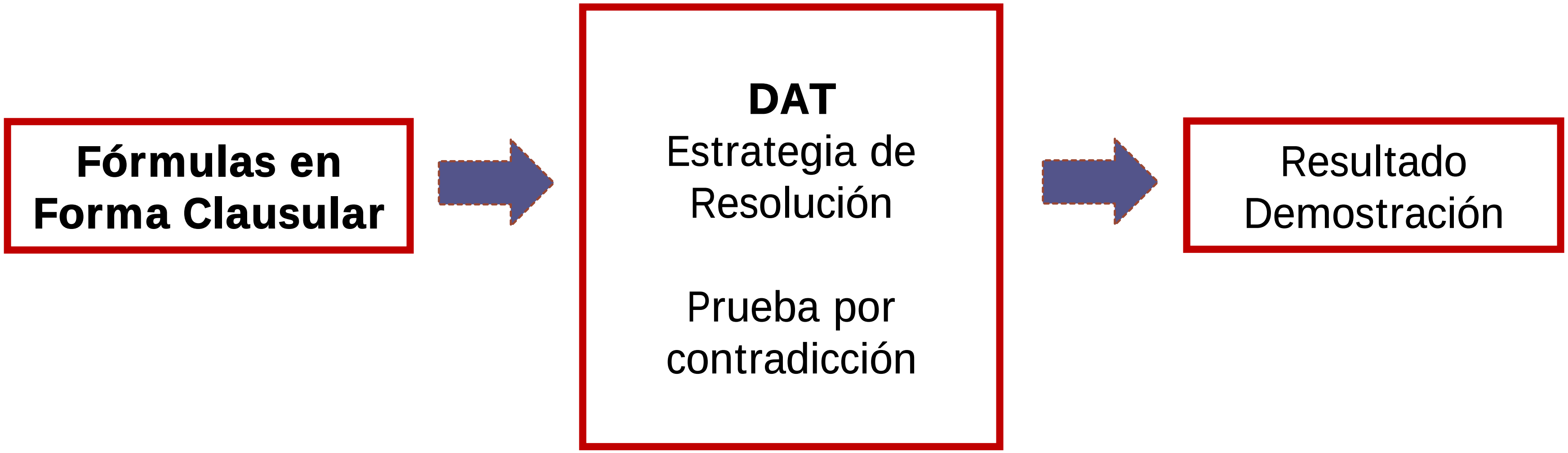
- Introducción a la demostración automática
- Estandarización de fórmulas
- Formas normales
  - Forma normal conjuntiva
- Forma clausular
- Forma clausular de una deducción

Introducción a la Demostración Automática (I)

- El cálculo de deducción natural es intuitivo, pero no es óptimo para la automatización de demostraciones lógicas
- El **razonamiento automático** se dedica a estudiar cómo usar un ordenador para ayudar en la parte de resolución de problemas que requiere razonamiento
  - Se trata de implementar programas que verifiquen un razonamiento mediante una serie de pasos de inferencia
  - Se suele denominar deducción automática porque se suele utilizar razonamiento como proceso deductivo
  - Cuando el trabajo se centra en la obtención de algoritmos que permitan encontrar pruebas de teoremas matemáticos, recibe el nombre de demostración automática de teoremas (DAT)

Introducción a la Demostración Automática (II)

- Los Demostradores Automáticos de Teoremas (DAT)
  - Hacen uso de una representación especial de las fórmulas, una representación estandarizada: la **forma clausal o clausular**
  - Utilizan resolución (**principio de Robinson**) mediante un algoritmo que se aplica a un conjunto de clausulas de entrada y que comprueba si son insatisfacibles
  - Realizan pruebas por contradicción (o refutación), en la mayoría de los casos



Introducción a la Demostración Automática (III)

- La **Demostración Automática de Teoremas** tiene como objetivo:
  - El desarrollo de algoritmos que verifiquen un razonamiento mediante pasos de inferencia
- Temas involucrados:
  - Representación del conocimiento
    - Forma Clausular (FC)
  - Reglas para derivar conocimiento
    - Métodos de Resolución (Robinson)
  - Estrategias para controlar dichas reglas
    - Input, ordenada, SLD

Estandarización de Fórmulas (I)

- Objetivo: **Simplificar las fórmulas**
  - Queremos obtener, mediante una serie de **transformaciones**, una fórmula que sea más fácil de manipular automáticamente, pero que mantenga las propiedades de la fórmula original (*estandarización*)
  - El objetivo de la **estandarización** de fórmulas es reducir la variedad sintáctica de un LP, uniformando sus fórmulas
    - Reducir la variedad sintáctica = reducir el número de conectivas
  - Las transformaciones que vamos a aplicar **preservan la semántica** de la fórmula original
    - la fórmula resultante es **equivalente** a la fórmula original

Estandarización de Fórmulas (II)

- Transformaciones:

Fórmula en un lenguaje proposicional	$\neg(p \rightarrow q) \vee \neg r$
⬇	⬇
Fórmula en forma normal conjuntiva	$(p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r)$
⬇	⬇
Fórmula en forma clausular	$\{ p \vee \neg r, \neg q \vee \neg r \}$

Formas Normales (I)

- Algunas definiciones:
  - un **átomo** es una variable proposicional
    - p, q, r y s son átomos
  - un **literal** es un átomo o su negación (es una proposición o la negación de una proposición)
    - p, ¬p, y r son literales
    - p → q no es un literal
  - una **cláusula** es una disyunción de uno o más literales
    - $p \lor \neg r \lor \neg q$ es una cláusula; p también lo es
    - $r \land s$ no es una cláusula
  - La **forma clausular** de un razonamiento viene a ser un conjunto de cláusulas
    - $\{p \lor \neg r \lor \neg q, r \lor s, \neg q\}$ es una forma clausular

Formas Normales (II)

- El objetivo de la estandarización de fórmulas es reducir la variedad sintáctica de un LP, uniformando sus fórmulas
  - Reducción de la multiplicidad de conectivas (formas normales en la lógica proposicional)
    - Forma normal conjuntiva (FNC)
    - Forma normal disyuntiva (FND)
  - Forma Clausal o Clausular (variante sintáctica de la Forma Normal Conjuntiva)
- La idea es que la **fórmula inicial es satisfacible sii su transformada es satisfacible**

Forma Normal Conjuntiva (FNC) (I)

- Una fórmula en **Forma Normal Conjuntiva** (FNC) es una conjunción de disyunciones de literales

- $(\neg p \vee q) \wedge (r \vee p \vee q)$ es una FNC
- $\neg p \wedge (r \vee p \vee q)$ es una FNC
- $r \vee p \vee q$ es una FNC
- $\neg p \wedge r$ es una FNC
- r es una FNC
- $r \vee (\neg p \wedge \neg q)$ no es una FNC
- $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ no es una FNC
- $p \leftrightarrow q$ no es una FNC
- $p \vee \neg\neg q$ no es una FNC
- $\neg(p \vee q)$ no es una FNC

Forma Normal Conjuntiva (FNC) (II)

- Para transformar una fórmula proposicional en otra en FNC se utilizarán los siguientes teoremas de equivalencia:
  - Interdefinición: (eliminar bicondicionales y condicionales usando la equivalencia)
    - $\vdash (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
    - $\vdash (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$
  - Leyes de De Morgan: (interiorizar negaciones usando equivalencias)
    - $\vdash \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
    - $\vdash \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
  - Distribución de $\vee$ y $\wedge$:
    - $\vdash A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
    - $\vdash A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
  - Doble negación:
    - $\vdash \neg\neg A \leftrightarrow A$

Forma Normal Conjuntiva (FNC) (III)

- Lema:
  - Para toda fórmula A, $\vdash A \leftrightarrow FNC(A)$
- Lema:
  - La forma normal conjuntiva de una fórmula siempre existe
    - Es decir, podemos utilizar exclusivamente la FNC de las fórmulas

Ejemplos (I)

- Calcular la FNC de $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

$$(p \rightarrow q) \rightarrow r$$
$$\neg (p \rightarrow q) \vee r$$
$$\neg (\neg p \vee q) \vee r$$
$$(\neg \neg p \wedge \neg q) \vee r$$
$$(p \wedge \neg q) \vee r$$
$$(p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$$

$$\text{FNC}(A) = (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$$

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$$
$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$$
$$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$
$$\neg \neg A \leftrightarrow A$$
$$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

Ejemplos (II)

- Calcular la FNC de $\neg(p \wedge (q \to r))$

$\neg(p \wedge (q \to r))$ $\quad\quad$ $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

$\neg p \vee \neg(q \to r)$ $\quad\quad$ $(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$

$\neg p \vee \neg(\neg q \vee r)$ $\quad\quad$ $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$\neg p \vee (\neg\neg q \wedge \neg r)$ $\quad\quad$ $\neg\neg A \leftrightarrow A$

$\neg p \vee (q \wedge \neg r)$ $\quad\quad$ $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$

FNC (A) = $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$

Ejemplos (III)

- Calcular la FNC de $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow p)$

$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow p)$ $\quad (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$

$(\neg p \vee r) \vee (q \rightarrow p)$ $\quad (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$

$(\neg p \vee r) \vee (\neg q \vee p)$

$\neg p \vee r \vee \neg q \vee p$

FNC (A) = $\neg p \vee r \vee \neg q \vee p$

Ejercicios

- Calcular la FNC de $\neg r \rightarrow \neg (p \vee q)$

fórmula a transformar		regla a aplicar
$\neg r \rightarrow \neg(p \vee q)$	$\leftrightarrow$	[implicación]
$\neg\neg r \vee \neg(p \vee q)$	$\leftrightarrow$	[negación]
$r \vee \neg(p \vee q)$	$\leftrightarrow$	[De Morgan]
$r \vee (\neg p \wedge \neg q)$	$\leftrightarrow$	[distributividad]
$(r \vee \neg p) \wedge (r \vee \neg q)$		

- Calcular la FNC de $\neg p \leftrightarrow ((\neg q \vee \neg r) \rightarrow s)$

Forma Clausular (FC) (I)

- Una fórmula F es satisfacible sii FN(F) es satisfacible y la FN(F) existe siempre para cualquier fórmula F, luego podemos trabajar exclusivamente con fórmulas en forma normal
- Para trabajar más cómodamente con fórmulas en FNC utilizaremos la **Forma Clausular** (FC)
- **Cláusula**: es la disyunción finita de cero o más literales
  - si tiene un sólo literal se denomina cláusula atómica o unitaria
  - si no tiene ningún literal se denomina cláusula vacía (□) y por convenio es insatisfacible

Forma Clausular (FC) (II)

- La **Forma Clausular** de una fórmula A (FC(A)) es el conjunto de cláusulas de la Forma Normal Conjuntiva de A (FNC(A))
- La **Forma Clausular** se entiende como la conjunción de las cláusulas
  - A: $(p \lor \neg r) \land (\neg q \lor \neg r) \land \neg s \land (r \lor s)$
  - FC(A): $\{ p \lor \neg r, \neg q \lor \neg r, \neg s, r \lor s \}$
- Una fórmula A es satisfacible sii FC(A) es satisfacible

Forma Clausular (FC) (III): Ejemplos

- $A : (p \to q) \to r$
  - $FNC(A) = (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$
  - $FC(A) = \{p \vee r, \neg q \vee r\}$
- $A: \neg(p \wedge (q \to r))$
  - $FNC(A) = (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$
  - $FC(A) = \{\neg p \vee q, \neg p \vee \neg r\}$
- $A: (p \to r) \vee (q \to p)$
  - $FNC(A) = \neg p \vee r \vee \neg q \vee p$
  - $FC(A) = \{\neg p \vee r \vee \neg q \vee p\}$

Forma Clausular de una Deducción (I)

- Una deducción $T[A1, A2, \ldots, An] \vdash B$ es **correcta** sii se cumple $T \vdash A1 \wedge A2 \wedge \ldots \wedge An \rightarrow B$
  - Teorema de la deducción
- Una deducción $T[A1, A2, \ldots, An] \vdash B$ es **correcta** sii se cumple $\vDash A1 \wedge A2 \wedge \ldots \wedge An \rightarrow B$
  - Equivalencia de $\vdash$ y $\vDash$
- Una deducción $T[A1, A2, \ldots, An] \vdash B$ es **correcta** sii $A1 \wedge A2 \wedge \ldots \wedge An \wedge \neg B$ es insatisfacible

Forma Clausular de una Deducción (II)

- Una deducción T[A1, A2, ..., An] $\vdash$ B es **correcta** sii FC(A1 $\wedge$ A2 $\wedge$ ... $\wedge$ An $\wedge$ $\neg$B) es insatisfacible
  - Por tanto*, automatizar el análisis de la corrección de una deducción pasa por automatizar el análisis de la insatisfacibilidad de una fórmula*

Forma Clausular de una Deducción (III)

- Una deducción T[A1, A2, …, An] $\vdash$ B es **correcta** sii FC(A1 $\wedge$ A2 $\wedge$ … $\wedge$ An $\wedge$ $\neg$B) es insatisfacible
- Objetivo:
  - Dado un razonamiento ([A1, A2, …, An] $\vdash$ B) con premisas {A1, …, An} y conclusión B, queremos transformarlo en un conjunto de cláusulas: su **forma clausular**
  - Para ello, transformamos todas las Ai y la negación de la conclusión ($\neg$ B) en cláusulas, generando un conjunto de cláusulas

Forma Clausular de una Deducción (IV)

- Pasos: dada una deducción: [A1, A2, ..., An] $\vdash$ B
  - Obtener la forma clausular de cada Ai, $1 \leq i \leq n$
  - Obtener la forma clausular de $\neg$B
  - Realizar la unión de todos los conjuntos de cláusulas
  - Comprobar la satisfacibilidad

Calcular la **forma normal conjuntiva (FNC)** y transformar dicha forma conjuntiva en un conjunto de cláusulas

Por tanto, se trata ahora de ver cómo comprobar automáticamente la satisfacibilidad de un conjunto de cláusulas

Forma Clausular de una Deducción (III): Ejemplo

- $T\ [p \rightarrow q, \neg q] \vdash \neg p \wedge q$

$$\begin{array}{lcl} FC(p \rightarrow q) & = & \{\neg p \vee q\} \\ FC(\neg q) & = & \{\neg q\} \\ FC(\neg(\neg p \wedge q)) & = & \{p \vee \neg q\} \end{array}$$

- la forma clausular de la estructura deductiva es

$$\{\ \neg p \vee q,\ \ \neg q,\ \ p \vee \neg q\ \}$$

  - Hemos de comprobar si este conjunto de cláusulas es satisfacible, es decir, si hay una interpretación que es un modelo

- I es modelo de una cláusula C si satisface a C (vista como si fuera una fórmula cualquiera)
- I es modelo de una forma clausular FC si satisface a todas sus cláusulas
- en este caso, hay una interpretación que es modelo de la forma clausular:
  - $I(p) = \mathbf{f}$
  - $I(q) = \mathbf{f}$

por lo tanto, la deducción es incorrecta

Ejercicios

- Pasar a forma clausular la siguiente argumentación
  - $p \wedge (q \rightarrow r) \vdash p \vee q \rightarrow r$
- Pasar a forma clausular, indicando cada paso y regla aplicada, la siguiente argumentación:
  - $\{q \rightarrow \neg p, \neg (p \wedge r) \rightarrow q, p \rightarrow \neg (q \rightarrow r)\} \vDash r \vee s$

Estandarización de Fórmulas Proposicionales

Curso 2014-2015

Mari Carmen Suárez de Figueroa Baonza
mcsuarez@fi.upm.es

POLITÉCNICA